Sucesiones

Una *sucesión* es una lista infinita de números reales.

Ejemplos.

a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

b. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \dots$

c. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots$

d. $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

e. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$

f. $1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, \dots$ donde a es algún número real

g. $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots$ donde a es algún número real

h. $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{13}{12}, \frac{77}{60}, \frac{87}{60}, \frac{669}{420}, \dots$

i. $0.54030, -0.41614, -0.98999, -0.65364, 0.28366, 0.96017, \dots$

Para dar una sucesión no basta dar unos cuantos números porque después la sucesión podría tomar cualquier camino, hay que decir como son todos. Formalmente, una **sucesión** es una función $s: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ y para decir como es la sucesión hay que decir cuanto vale $s(n)$.

Ejemplos (las sucesiones anteriores)

$a(n) = \frac{1}{n}$

$b(n) = \sqrt{n}$

$c(n) = \frac{2^n-1}{2^n}$

$d(n) = (-1)^n$

$e(n) =$ *el enésimo número primo*

$f(n) = n^a$

$g(n) = a^n$

$h(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$

$i(n) = \cos(n)$ *(el coseno de n radianes, con 5 cifras decimales)*

Muchas veces en lugar de $s(n)$ escribimos s_n, por ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \sqrt{n}$

Podemos combinar sucesiones para obtener nuevas sucesiones, por ejemplo sumándolas, multiplicándoles o dividiéndolas (si la que divide no se hace 0).

Ejemplos. (con las sucesiones anteriores)

$j_n = d_n+e_n$	$1, 4, 4, 8, 10, 14, 16, 20, \dots$
$k_n = d_n \cdot e_n = (-1)\ \frac{1}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
$l_n = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}, \dots$
$m_n = a_{n+1}- a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

Una clase importante de sucesiones son las que se obtienen sumando los primeros n términos de otras sucesiones: si a_n es cualquier sucesión, podemos considerar la sucesión de *sumas parciales*

$$s_n = a_1+a_2+...+a_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$$

Las sucesiones de sumas parciales son llamadas **series**.

Ejemplos.

Si $a_n = {}^1/_n$ entonces $s_n = {}^1/_2+{}^1/_3+{}^1/_4+{}^1/_5+...+{}^1/_n = \sum_{i=1}^{i=n} {}^1/_i$

Si $g_n = {}^1/_{2^n}$ entonces $s_n = {}^1/_2+{}^1/_{2^2}+{}^1/_{2^3}+{}^1/_{2^4}+...+{}^1/_{2^n} = \sum_{i=1}^{i=n} {}^1/_{2^i}$

Límites de sucesiones.

Dada una sucesión de números reales, podemos preguntarnos si estos números se aproximarán cada vez más a algún número fijo o no.

Intuitivamente, una sucesión de números a_n tiene como *límite* al número real **r** si para los valores grandes de n los números a_n están muy cerca de **r**. En este caso diremos que la sucesión *converge* a **r**. Si la sucesión no converge a ningún número real diremos que *diverge*.
Si para los valores grandes de n los números a_n son muy grandes diremos que la sucesión *diverge* a ∞.

Ejemplos

$a_n = {}^1/_n$	*converge a 0*
$t_n = {}^{n+1}/_n$	*converge a 1*
$b_n = \sqrt{n}$	*diverge a ∞*
$c_n = (-1)^n$	*diverge*
$s_n = {}^1/_2+{}^1/_{2^2}+{}^1/_{2^3}+{}^1/_{2^4}+...+{}^1/_{2^n}$	*converge a 1*
$u_n = (n+1)^2- n^2$	*diverge a ∞*
$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	*converge a 0*
$u_n = \cos(n)$	*diverge*

Ejercicios. Calcula los límites de las siguientes sucesiones, si es que existen

$$t(n) = \frac{3n+2}{4+5n}$$

$$s(n) = \frac{3n^3-4n^2+7n-5}{2n^3+3n^2+9n}$$

$$u(n) = \frac{3n^3-4n^2+7n^{-1}-5}{2n^2+3n+9}$$

$$v(n) = \sqrt{n+1001} - \sqrt{n}$$

$$w(n) = \sqrt{1.001n} - \sqrt{n}$$

$$t(n) = {}^1/_{n+1} - {}^1/_n$$

Formalmente, decimos que la sucesión a_n **converge** al número real **r**, si dado cualquier numero real positivo ε existe un número natural n_ε (que depende de ε) tal que para todo n mayor o igual a n_ε, la distancia de a_n a **r** es menor que ε. En símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r \quad \text{si } \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \text{ tal que } \forall\, n \geq n_\varepsilon,\ |a_n - r| < \varepsilon\ .$$

Si la sucesión a_n no converge a ningún número real diremos que a_n **diverge**.

Diremos que la sucesión a_n **diverge** a ∞ si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{si } \forall \mathbf{r},\ \exists\, n_\varepsilon \text{ tal que } \forall\, n \geq n_\varepsilon,\ a_n > \mathbf{r}\ .$$

Ejemplos.

Si $a_n = 1/n$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Para que $|a_n - 0| < \varepsilon$ basta que $1/n < \varepsilon$ o sea que $n > 1/\varepsilon$.

Si $b_n = 1/n^2$ entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Para que $|b_n - 0| < \varepsilon$ basta que $1/n^2 < \varepsilon$ o sea $n^2 > 1/\varepsilon$, es decir $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$

Si $c_n = 1/\sqrt{n}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Para que $|b_n - 0| < \varepsilon$ basta que $1/\sqrt{n} < \varepsilon$ o sea $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$, es decir $n > 1/\varepsilon^2$

Las sucesiones y series geométricas son las formadas por potencias de un número real a.
Los límites de las sucesiones geométricas son fáciles de calcular:

si $a>1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

si $0<a<1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

si $a=1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

si $a<0$, $\lim_{n\to\infty} a^n$ *no existe (la sucesión diverge)*

Ejemplos. $\lim_{n\to\infty} \pi^n = \infty$ $\quad \lim_{n\to\infty} (1/\pi)^n = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} (-\pi)^n$ *no existe.*

Veamos ahora las series geométricas $s_n = a^1+a^2+a^3+\ldots+a^n = \sum a^i$

Primero calculemos $s(n)$. Si multiplicamos s_n por $a-1$ queda

$$(a^1+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}+a^n)(a-1) = (a^2+a^3+a^4+\ldots+a^n+a^{n+1}) - (a^1+a^2+a^3 - \ldots + a^{n-1}+a^n) = a^{n+1} - a^1$$

así que dividiendo entre $a-1$ queda

$$a^1+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}+a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}$$

Si $-1<a<1$ entonces cuando n crece las potencias a^{n+1} convergen a 0, así que $\dfrac{a^{n+1}-a}{a-1} \to \dfrac{0-a}{a-1} = \dfrac{a}{1-a}$

por lo tanto si $a<1$, $\lim_{n\to\infty} a^1+a^2+a^3+\ldots+a^n = \dfrac{a}{1-a}$

Si $a>1$ entonces cuando n crece las potencias a^{n+1} se hacen cada vez mas grandes y divergen a ∞ así que $a^{n+1}-a$ se hace cada vez mas grande mientras que el denominador se queda fijo, así que $\dfrac{a^{n+1}-a}{a-1} \to \infty$

por lo tanto si $a>1$, $\lim_{n\to\infty} a^1+a^2+a^3+\ldots+a^n = \infty$

Si $a<-1$ entonces las potencias a^{n+1} se hacen cada vez mas grandes y van cambiando de signo, así que $\dfrac{a^{n+1}-a}{a-1}$ va aumentando en tamaño y va cambiando de signo, por lo que el límite no existe.

Ejemplos.

$$\lim_{n\to\infty} (5/7)+(5/7)^2+(5/7)^3+\ldots+(5/7)^n = \frac{5/7}{1-5/7} = \frac{5/7}{2/7} = 5/2$$

$$\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}^2+1/\sqrt{2}^3+1/\sqrt{2}^4+\ldots+1/\sqrt{2}^n = \frac{1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (7/5)+(7/5)^2+(7/5)^3+\ldots+(7/5)^n = \infty \quad \textit{porque } 7/5 > 1$$

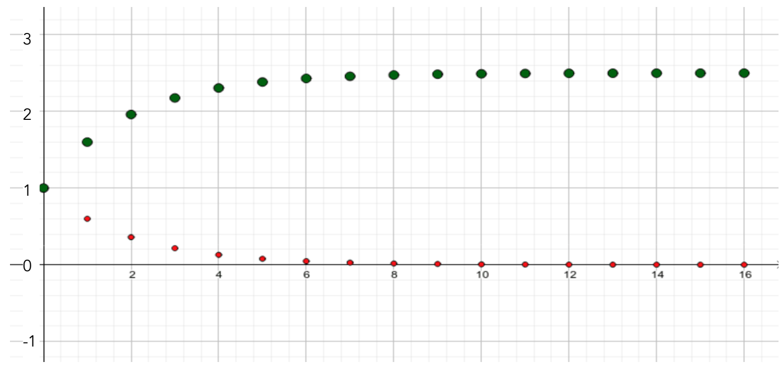
Ejemplo. Gráficas de la sucesión y la serie geométrica para $^3/_5$

Ojo: Este ejemplo empieza en n=0, no en n=1

La sucesión $a_n = (^3/_5)^n$

La sucesión de sumas parciales

$s_n = (^3/_5)^0+(^3/_5)^1+(^3/_5)^2+(^3/_5)^3+\dots+(^3/_5)^n$



Ejercicio. Calcular la suma infinita $^1/_3+^1/_9+^1/_{27}+^1/_{81}+\dots+^1/_{3^n}+^1/_{3^{n+1}}+\dots$

R: La suma infinita es el limite de las sumas parciales $s_n = {}^1/_3+^1/_9+^1/_{27}+^1/_{81}+\dots+^1/_{3^n}$

$\lim_{n\to\infty} {}^1/_3+^1/_9+^1/_{27}+^1/_{81}+\dots+^1/_{3^n} = \dfrac{^1/_3}{1-{}^1/_3} = \dfrac{1}{2}$

Calcular $-^1/_3+^1/_9-^1/_{27}+^1/_{81}-\dots-^1/_{3^n}+^1/_{3^{n+1}}\dots$ R: $\dfrac{-^1/_3}{1-(-^1/_3)} = -\dfrac{1}{4}$

Cada sucesión convergente está acotada: existe un número r tal que $|a_n|\le r$ para toda n.
Si $a_n \to a$ entonces existe un número n_1 a partir del cual $|a_n-a| <1$ así que $|a_n| < |a|+1$ por lo que los a_n con $n\ge n_1$ están acotados por $|a|+1$. Los primeros términos $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n_1}$ no tienen que tener valores absolutos menores que $|a|+1$, pero como son una cantidad de términos hay uno, digamos a_j cuyo valor absoluto es mayor o igual que el de los demás, así que todos los términos de la sucesión están acotados por $\max\{ |a_j|, |a|+1\}$.

Lema. Si a_n y b_n son sucesiones y $a_n\to a$ y $b_n \to b$ entonces

1. $a_n+b_n \to a+b$
2. $a_n\cdot b_n \to a\cdot b$
3. $1/a_n \to 1/a$ siempre que $a\neq 0$
4. $a_n/b_n \to a/b$ siempre que $b\neq 0$

Demostración. Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que $a_n\to a$ y $b_n \to b$.

1. $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon$ tales que $\forall\ n\ge n_\varepsilon$, $|a_n-a| < {}^\varepsilon/_2$ y $\forall\ n\ge\tilde{n}_\varepsilon$, $|b_n-b| < {}^\varepsilon/_2$, así que si $m_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon\}$ entonces $\forall\ n\ge m_\varepsilon$, $|a_n-a| < {}^\varepsilon/_2$ y $|b_n-b| < {}^\varepsilon/_2$ y por lo tanto $|(a_n+b_n) - (a+b)| \le |a_n-a| + |b_n-b| < {}^\varepsilon/_2+{}^\varepsilon/_2 = \varepsilon$.

2. Como a_n y b_n son sucesiones convergentes, a_n y b_n están acotadas, o sea que existen números A y B tales que $|a_n|\le A$ y $|b_n|\le B$ para toda n. Como $a_n\to a$ y $b_n \to b$ entonces $\forall\varepsilon > 0$ existen n_ε, $\tilde{n}_\varepsilon$ tales que $\forall n\ge n_\varepsilon$, $|a_n-a| < {}^\varepsilon/_{2B}$ y $\forall\ n\ge\tilde{n}_\varepsilon$, $|b_n-b| < {}^\varepsilon/_{2A}$, así que si $m_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon\}$ entonces $\forall\ n\ge m_\varepsilon$, $|a_n-a| < {}^\varepsilon/_2$ y $|b_n-b| < {}^\varepsilon/_2$ y por lo tanto $|a_n\cdot b_n - a\cdot b| = |a_n\cdot b_n - a_n\cdot b+a_n\cdot b-a\cdot b| \le |a_n\cdot b_n-a_n\cdot b| + |a_n\cdot b-a\cdot b| = |a_n\cdot(b_n-b)| + |(a_n-a)\cdot b| < A\cdot{}^\varepsilon/_{2A}+{}^\varepsilon/_{2B}B = {}^\varepsilon/_2+{}^\varepsilon/_2 = \varepsilon$.

3. Como a_n converge a $a\neq 0$, existe una $n_{a/2}$ tal que $|a_n-a| \le |{}^a/_2|$ y por lo tanto $|a_n|\ge|{}^a/_2|$. Además, para $\forall\ \varepsilon > 0$, existe n_ε tal que $\forall\ n\ge n_\varepsilon$, $|a_n-a| < {}^{a\varepsilon}/_2$.

Así que si $n\ge n_{a/2},n_\varepsilon$ entonces $|1/a_n - 1/a| = |a-a_n/a_n\cdot a| = |a-a_n| / |a_n\cdot a| \le {}^{a\varepsilon}/_2 / |{}^a/_2| = \varepsilon$.

4. Es consecuencia directa de 2 y 3. •

Ejercicio. Si $a_n \to {}^1\!/_2$ y $b_n \to {}^4\!/_3$ dí a donde convergen las siguientes sucesiones:

$a_n - 2b_n$ R. ${}^{19}\!/_6$

$a_n^{\;2}$ R. ${}^1\!/_4$

$\sqrt{a_n}/\sqrt{b_n}$ R. $\sqrt{{}^3\!/_8}$

Encontrar el límite de una sucesión arbitraria puede ser muy difícil. Saber que el limite existe, aunque no sepamos cual es, puede ser muy útil. ¿Y como podemos saber si una sucesión converge o no, si no tenemos idea a donde podría converger?

Decimos que una sucesión a_n es **no decreciente** si $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \le \dots$ y que a_n es **acotada** si existe un número real r tal que $|a_n| \le r$ para toda n.

Lema. Toda sucesión no decreciente y acotada de números reales converge.

Demostración. Sea a_n una sucesión no decreciente y acotada. Sea $a=\sup\{s_n\}$, (el supremo existe porque el conjunto $\{s_n\}$ es no vacío y acotado. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Para demostrarlo hay que ver que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\exists\ n_\varepsilon$ tal que $\forall\ n \ge n_\varepsilon,\ |a_n - r| < \varepsilon$.
Como $a = \sup\{s_n\}$ entonces ningún número menor que a es cota superior de $\{s_n\}$, así que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\exists\ n_\varepsilon$ tal que $a_{n_\varepsilon} > a-\varepsilon$.
y como la sucesión es creciente, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$ se tiene que $a_n \ge a_{n_\varepsilon} > a-\varepsilon$ y por lo tanto $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$. •

Ejemplos.
¿La sucesión $s_n = {}^1\!/_1+{}^1\!/_2+{}^1\!/_3+{}^1\!/_4+\dots+{}^1\!/_n = \sum {}^1\!/_i$ converge?
La sucesión es creciente porque es suma de números positivos. Pero la sucesión no está acotada ya que si la comparamos

$$\frac11+\frac12+\frac13+\frac14+\frac15+\frac16+\frac17+\frac18+\frac19+\frac1{10}+\frac1{11}+\frac1{12}+\frac1{13}+\frac1{14}+\frac1{15}+\frac1{16}+\frac1{17}+\frac1{18}+\frac1{19}+\frac1{20}+\frac1{21}+\frac1{22}+\frac1{23}+\frac1{24}+\dots$$
$$\| \quad \| \quad \vee \quad \| \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \| \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \| \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$$
$$\frac11+\frac12+\underbrace{\frac14+\frac14}_{}+\underbrace{\frac18+\frac18+\frac18+\frac18}_{}+\underbrace{\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}+\frac1{16}}_{}+\underbrace{\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\frac1{32}+\dots}_{}$$
$$1 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2$$

así que las sumas parciales eventualmente rebasan a cualquier número natural, por lo que la sucesión diverge a ∞.

¿La sucesión $s_n = {}^1\!/_{1^2}+{}^1\!/_{2^2}+{}^1\!/_{3^2}+{}^1\!/_{4^2}+\dots+{}^1\!/_{n^2} = \sum {}^1\!/_{i^2}$ converge?
Como la sucesión es creciente, para ver si converge hay que ver si está acotada. Podemos compararla con otra serie

$$\frac1{1^2}+\frac1{2^2}+\frac1{3^2}+\frac1{4^2}+\frac1{5^2}+\frac1{6^2}+\frac1{7^2}+\frac1{8^2}+\frac1{9^2}+\frac1{10^2}+\frac1{11^2}+\frac1{12^2}+\frac1{13^2}+\frac1{14^2}+\frac1{15^2}+\frac1{16^2}+\frac1{17^2}+\frac1{18^2}+\frac1{19^2}+\frac1{20^2}+\dots$$
$$\| \quad \| \quad \wedge \quad \| \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \| \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \| \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge$$
$$\frac1{1^2}+\underbrace{\frac1{2^2}+\frac1{2^2}}_{}+\underbrace{\frac1{4^2}+\frac1{4^2}+\frac1{4^2}+\frac1{4^2}}_{}+\underbrace{\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}+\frac1{8^2}}_{}+\underbrace{\frac1{16^2}+\frac1{16^2}+\frac1{16^2}+\frac1{16^2}+\frac1{16^2}+\dots}_{}$$
$$1 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_4 + {}^1\!/_8 + {}^1\!/_{16}$$

como la serie geométrica de abajo suma 2, la serie de arriba esta acotada y por lo tanto converge.

Ejercicio. ¿La serie $s_n = {}^1\!/_{\sqrt1}+{}^1\!/_{\sqrt2}+{}^1\!/_{\sqrt3}+{}^1\!/_{\sqrt4}+\dots+{}^1\!/_{\sqrt n} = \sum {}^1\!/_{\sqrt i}$ converge?
La sucesión es creciente (porque es suma de números positivos) pero no está acotada, ya que sus términos son mayores o iguales a los de la serie $s_n = {}^1\!/_1+{}^1\!/_2+{}^1\!/_3+{}^1\!/_4+\dots+{}^1\!/_n+\dots = \sum {}^1\!/_i$ que diverge.

Ejercicio. ¿La serie $s_n = {}^1\!/_1-{}^1\!/_2+{}^1\!/_3-{}^1\!/_4+{}^1\!/_5-{}^1\!/_6-{}^1\!/_7+{}^1\!/_8+\dots\pm{}^1\!/_n\pm\dots = \sum {}^{(-1)^i}\!/_i$ converge?

Si agrupamos los términos de la serie en pares vemos que es una suma de terminos positivos

$$s_{2n} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{12} + {}^{1}/_{30} + {}^{1}/_{56} + \dots + {}^{1}/_{2n(2n-1)} = \sum {}^{1}/_{2i(2i-1)} \le \sum {}^{1}/_{2i(i)} = {}^{1}/_{2} \sum {}^{1}/_{i^2}$$

y ya vimos que esta serie está acotada, así que s_{2n} está acotada y por lo tanto converge.

Las sucesiones y series pueden converger o diverger a ∞ a velocidades muy distintas. Las sucesiones y series geométricas convergen o divergen muy rápido.

Ejemplos.

¿Que tan rápido converge la sucesión $a_n = ({}^{9}/_{10})^n$?

La distancia de a_n a 0 es $({}^{9}/_{10})^n$. y como $({}^{9}/_{10})^7 < {}^{1}/_{2}$ la distancia de a_n a 0 se reduce a menos de la mitad cada 7 pasos.

¿Que tan rápido converge la sucesión $s_n = {}^{9}/_{10} + ({}^{9}/_{10})^2 + ({}^{9}/_{10})^3 + \dots + ({}^{9}/_{10})^n$?

$$s_n = \frac{({}^{9}/_{10})^{n+1} - {}^{9}/_{10}}{{}^{9}/_{10} - 1}, \text{ el límite es } \frac{-{}^{9}/_{10}}{{}^{9}/_{10} - 1} \text{ y la diferencia es } \frac{({}^{9}/_{10})^{n+1}}{{}^{9}/_{10} - 1} = 9\,({}^{9}/_{10})^n$$

como $({}^{9}/_{10})^7 < {}^{1}/_{2}$ la distancia se reduce a la mitad cada 7 pasos (aunque es 9 veces mayor que en el ejemplo anterior)

¿Que tan rápido diverge la sucesión $s_n = {}^{10}/_{9} + ({}^{10}/_{9})^2 + ({}^{10}/_{9})^3 + \dots + ({}^{10}/_{9})^n$?

$s_n = \dfrac{({}^{10}/_{9})^{n+1} - {}^{10}/_{9}}{{}^{10}/_{9} - 1} = 10({}^{10}/_{9})^n - 10$. Como $({}^{10}/_{9})^7 > 2$, en 7 pasos s_n vale mas de 10, y cada 7 pasos su valor crece a mas del doble.

En 23 pasos s_n ya vale mas de 100 y en 44 pasos ya vale mas de 1000.

Ejemplo. ¿Que tan rápido diverge la sucesión $s_n = {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{4} + \dots + {}^{1}/_{n} = \sum {}^{1}/_{i}$?

¿Cuantos términos harán falta para que la suma llegue a 10? ¿y para que llegue de 20?
Comparémosla con otra serie divergente que sea mas fácil de calcular

$$^{41}/_{1}+{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{3}+{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{5}+{}^{1}/_{6}+{}^{1}/_{7}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{9}+{}^{1}/_{10}+{}^{1}/_{11}+{}^{1}/_{12}+{}^{1}/_{13}+{}^{1}/_{14}+{}^{1}/_{15}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{17}+{}^{1}/_{18}+{}^{1}/_{19}+{}^{1}/_{20}+{}^{1}/_{21}+{}^{1}/_{22}+{}^{1}/_{23}+{}^{1}/_{24}+\dots$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \wedge \quad \parallel \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \parallel \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \parallel \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge$$

$$\underset{1}{{}^{1}/_{1}} + \underbrace{{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{2}}_{1} + \underbrace{{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{4}}_{1} + \underbrace{{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}+{}^{1}/_{8}}_{1} + \underbrace{{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+{}^{1}/_{16}+\dots}_{1}$$

así que los primeros $1+2+4+8+\dots+2^{n-1} = 2^n-1$ términos suman menos de n.

Por lo tanto para que la suma llegue a 10 hacen falta mas de $2^{10}-1=1023$ términos y para que llegue a 20 hacen falta mas de $2^{20}-1=1,048,575$ términos.

Si una sucesión a_n converge a un número real r, a partir de un momento las distancias de s_n a r son menores que ε, y a partir de ese momento distancias entre dos términos sucesivos a_n y a_{n+1} son menores que 2ε, ya que $|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - r + r - a_n| \le |a_{n+1} - r| + |a_n - r| < \varepsilon + \varepsilon$.

Ejercicio. Dar ejemplos que muestren que el que las distancias entre términos sucesivos de una sucesión se aproximen a 0 no basta para que una sucesión sea convergente.

Si la sucesión a_n converge a r, entonces a partir de un momento las distancias de todos los s_n a r son menores que ε, y a partir de ese momento las distancias entre cualesquiera dos términos a_n y a_m es menor que 2ε, ya que $|a_n - a_m| = |a_n - r + r - a_m| \le |a_n - r| + |a_m - r| < \varepsilon + \varepsilon$.

Decimos que una sucesión a_n es una **sucesión de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ tal que $\forall\, m,n \ge n_\varepsilon$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Teorema. Una sucesión de números reales converge si y solo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración.
$\Rightarrow$ En el párrafo anterior mostramos que si la sucesión a_n converge entonces es de Cauchy.

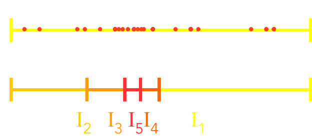
$\Leftarrow$ Supongamos ahora que la sucesión a_n es de Cauchy. Entonces existe un n a partir del cual $|a_n-a_m|<1$ para toda $n>m$ y esto dice que $|a_m| < |a_n|+1$ y la sucesión esta acotada por $\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|,..., |a_n|, |a_n|+1\}$.
Ahora si a_n es una sucesión creciente entonces por el lema anterior basta que a_n sea acotada para que sea convergente. Y acabamos de ver que las sucesiones de Cauchy son acotadas.
Si ahora a_n es cualquier sucesión de Cauchy, consideremos la sucesión $b_n = \inf\{ a_i / i\geq n\}$.
La sucesión b_n es creciente (porque los ínfimos lo tomamos sobre conjuntos con cada vez menos elementos) y es acotada (cualquier cota para la sucesión a_n es una cota para la sucesión b_n)
Así que la sucesión b_n converge a un número real b.
Afirmamos que la sucesión b_n-a_n converge a 0 y que por lo tanto a_n tiene el mismo límite que b_n.
Para ver que $b_n-a_n \to 0$ observemos que como a_n es de Cauchy, $\forall\ \varepsilon > 0$, existe n_ε tal que $\forall n,i\geq n_\varepsilon$, $|a_i-a_n| < \varepsilon$.
Así que $a_n+\varepsilon < a_i < a_n+\varepsilon$ y por lo tanto $a_n- \varepsilon \leq \inf\{ a_i / i\geq n\} \leq a_n+\varepsilon$ y esto dice que $|b_n - a_n |\leq \varepsilon$. •

A partir de una sucesión a_n podemos obtener otras sucesiones brincándonos algunos términos de a_n y quedandonos con los demás, a las sucesiones obtenidas así as llamamos *subsucesiones* de a_n.

Ejemplo. Para la sucesión $1, {}^1/_2 , {}^1/_3 , {}^1/_4 , {}^1/_5 , {}^1/_6, ... {}^1/_n , ...$ algunas subsucesiones son
${}^1/_2 , {}^1/_4 , {}^1/_6 , {}^1/_8 , ..., {}^1/_{2n} , ...$
$1, {}^1/_4 , {}^1/_9 , {}^1/_{16} , ..., {}^1/_{n^2} , ...$

Lema. Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna subsucesión convergente.

Demostración. Si la sucesión a_n toma un mismo valor v una cantidad infinita de veces entonces la subsucesión donde toma ese valor converge a v., asi que podemos suponer que la sucesión solo toma cada valor un número finito de veces y por lo tanto toma una infinidad de valores distintos.
Si la sucesión a_n está acotada entonces está contenida en un intervalo I_1.
si partimos el intervalo I_1 a la mitad, entonces al menos una de las mitades, llamémosla I_2, contiene una infinidad de valores de la sucesión. Si partimos el intervalo I_2 a la mitad, entonces al menos una de las mitades, llamémosla I_3, contiene una infinidad de valores de la sucesión. Y cada vez que partimos el intervalo I_m a la mitad, entonces al menos una de las mitades, llamémosla I_{m+1}, contiene una infinidad de valores dede la sucesión.
Ahora podemos elegir una subsucesión de a_n cuyo enesimo término esté en el intervalo I_n. Esta sucesión es de Cauchy porque todos los términos consecutivos están en el intervalo I_n, y las longitudes de estos intervalos se reducen a la mitad en cada paso, así que las distancias entre todos los términos de la subsucesión se aproximan a 0. •



Ejemplo. La sucesión $s_n = 1- {}^1/_3 - {}^1/_5 + {}^1/_7 - {}^1/_9 + ... \pm {}^1/_{2n-1} = \sum {}^{(-1)^{i-1}}/_{2i-1}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge. Usando cálculo avanzado se puede mostrar que el límite es exactamente ${}^\pi/_4$.

Ejemplo. Interés compuesto.

Imaginemos un banco que paga 100% de interés anual, sin importar cuanto tiempo dejemos.el dinero.
Si invertimos 1 peso, al año tendremos $1+1=2$ pesos.
Si invertimos 1 a los 6 meses tendemos $1+{}^1/_2$ y si reinvertimos por otros 6 meses tendremos $(1+{}^1/_2)(1+{}^1/_2) =$
$(1+{}^1/_2)^2= 2.25$ pesos
Si invertimos 1 peso a los 3 meses tendemos $1+{}^1/_4$, si invertimos por otros 3 meses tendremos $(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4)$, en otros 3 meses tendremos $(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4)$ y al cabo de un año tendremos $(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4)(1+{}^1/_4) =$
$(1+{}^1/_4)^4= 2.44140625$ pesos
Si invertimos 1 peso al mes tendemos $1+{}^1/_{12}$, y si lo reinvertimos cada mes al cabo de un año tendremos
$(1+{}^1/_{12})^{12}\approx 2.6130353$ pesos
Si invertimos 1 por 1 día tendemos $1+{}^1/_{365}$, si y si lo seguimos reinviertiendo cada día al cabo de un año tendremos
$(1+{}^1/_{365})^{365}\approx 2.7145675$ pesos
¿y si reinvertimos cada hora, o cada minuto o cada segundo cuando dinero tendremos? ¿Que pasaría si pudiéramos reinvertirlo cada instante, o *continuamente*?
Si reinvertimos n veces en el año al cabo del año tendremos $(1+{}^1/_n)^n$ pesos. Al reinvertir continuamente tendríamos
$\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_n)^n$ pesos. Resulta que este límite si existe, y es el *número de Euler*, $e \approx 2.718281828459045...$

Problemas.

1. Calcula explícitamente los primeros 8 términos de cada sucesión
   a. $a_n= n^2-6n+4$
   b. $b_n= \lfloor {}^2/_3\, n\rfloor$
   c. $c_n= {}^{n^2}/_{2^n}$
   d. $d_n= \tan(n)$
   e. $e_n= \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\, i$
   f. $f_n= \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i\, n$
   g. $g_n= \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^n\, i$
   h. $h_n= \sum_{i=1}^{i=n} {}^{(-1)^i}/_{2^i}$
2. Si $a_n= \dfrac{1}{n+1}$ calcula
   $b_n = a_{2n}$
   $c_n = a_{n^2}$
   $d_n = a_n/a_{n+1}$
   $e_n = 1/a_n^{\,2}-1/a_{n^2}$

3. Calcula los límites de estas sucesiones, si es que existen

a. $a_n = {}^{3^n}/_{\pi^n}$

b. $b_n = (n+{}^1/_n)^2 - (n-{}^1/_n)^2$

c. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d. $d_n = \cos(1/n)$

e. $e_n = 1/\cos(n)$

f. $f_n = {}^{n^2}/_{2^n}$

g. $g_n = {}^{n^3}/_{3^n}$

4. Estíma los límites de las siguientes sucesiones con un error menor que 1/100.

a. $s_n = {}^1/_{1^2}+{}^1/_{2^2}+{}^1/_{3^2}+{}^1/_{4^2}+{}^1/_{5^2}+ \dots +{}^1/_{n^2}$

b. $r_n = 1-{}^1/_3-{}^1/_5+{}^1/_7-{}^1/_9+ \dots +{}^{(-1)^n}/_{2n-1}$

5. Calcula exactamente las siguientes sumas infinitas, en caso de que existan

a. ${}^1/_{\sqrt{2}}+{}^1/_{\sqrt{2^2}}+{}^1/_{\sqrt{2^3}}+{}^1/_{\sqrt{2^4}}+\dots+{}^1/_{\sqrt{2^n}}+\dots$

b. $-{}^2/_3+{}^{2^2}/_{3^2}-{}^{2^3}/_{3^3}+{}^{2^4}/_{3^4}-\dots+{}^{(-2)^n}/_{3^n}-\dots$

c. ${}^{10}/_9-{}^{10^2}/_{9^2}+{}^{10^3}/_{9^3}-{}^{10^4}/_{9^4}-\dots-(-{}^{10}/_9)^n \dots$

6. Usando la misma idea de la fórmula para $a^1+a^2+a^3+\dots+a^n$, encuentra fórmulas para

$1+a^1+a^2+a^3+\dots+a^n$

$a^m+a^{m+1}+\dots+a^{n-1}+a^n$

7. Muestra que la sucesión $s_n = \sum {}^1/_{i^a}$ con es una sucesión de Cauchy para cada real $a>2$ y por lo tanto la suma infinita

${}^1/_{1^a}+{}^1/_{2^a}+{}^1/_{3^a}+{}^1/_{4^a}+{}^1/_{5^a}+{}^1/_{6^a}+{}^1/_{7^a}+{}^1/_{8^a}+{}^1/_{9^a}+\dots+{}^1/_{n^a}+\dots$

es un numero real para cada $a>2$.

Hint: muestra que $\sum {}^1/_{i^a}$ crece mas lento que $\sum {}^1/_{i^2}$ que es convergente y por lo tanto es de Cauchy.

8. En el ejemplo del banco, cuando dinero tendremos al final del año si lo reinvertimos?

a. cada hora b. cada minuto c. cada segundo

9. Usando que $\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_n)^n = e$ y las leyes de los exponentes, calcula

a. $\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_{2n})^{2n}$ b. $\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_n)^{3n}$ c. $\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_{4n})^n$ d.* $\lim_{n\to\infty} (1+{}^1/_n)^{n^2}$

10. Supongamos que depositamos 1 en un banco que paga *K*% de interés anual.

a. Si lo reinvertimos n veces durante el año, cuanto tendremos al final suponiendo que

a. K=10 b. K=50 c. K=200 d. K=300

b. ¿cuanto tendríamos al final en cada caso si lo reinvirtiéramos continuamente?

11. Como los racionales son numerables, existe una sucesión r_n que pasa por cada racional una vez. Muestra que para cada número real r hay una subsucesión de r_n que converge a r.